S E S 2 0 1 5
Eleventh Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, SAFETY
4 – 6 November 2015, Sofia, Bulgaria

ИЗВЕЖДАНЕ НА НЯКОИ ПОТЕНЦИАЛНО ВАЖНИ ЗА ФИЗИКАТА И АСТРОФИЗИКАТА МАСИ ПОСРЕДСТВОМ АНАЛИЗ НА РАЗМЕРНОСТИТЕ

Димитър Вълев

Институт за космически изследвания и технологии – Българска академия на науките
e-mail: valev@gbg.bg

Ключови думи: *анализ на размерностите, фундаментални константи, общо решение на линейни системи*

Резюме: *Към трите фундаментални константи (скоростта на светлината, гравитационната константа и Планковата константа), използувани от Макс Планк за извеждане на Планковата маса посредством анализ на размерностите, е добавена и константата на Хъбъл. В резултат на това е намерено общо решение за величината с размерност на маса* $m = \gamma^p m_P$*, където* m_P *е Планковата маса, γ ≈ 1.23×10*$^{-61}$ *е малка безразмерна величина, а p е произволен параметър в интервала [–1, 1]. Установено е, че Планковата маса* $m_1 \equiv m_P$ *= 2.17×10*$^{-8}$ *kg, масата на сферата на Хъбъл* m_2 *~ 10*^{53} *kg, минималния квант маса/енергия* m_3 *= 2.68×10*$^{-69}$ *kg, масата на Вайнберг* m_5 *= 1.08×10*$^{-28}$ *kg, Едингтоновата граница за масата на звездите* M_3 *= 6.6×10*^{32} *kg, масата на хипотетичния квантов гравитационен атом* M_2 *= 3.8×10*^{12} *kg и още някои потенциално важни за физиката и астрофизиката маси, представляват частни решения за стойност на параметъра p, изразена като дроб с малък числител и знаменател.*

DERIVATION OF SOME POTENTIALLY IMPORTANT MASSES FOR PHYSICS AND ASTROPHYSICS BY DIMENSIONAL ANALYSIS

Dimitar Valev

Space Research and Technology Institute – Bulgarian Academy of Sciences
e-mail: valev@gbg.bg

Keywords: *dimensional analysis, fundamental constants, general solution of linear system*

Abstract: *The Hubble constant has been added to the three fundamental constants (speed of light, gravitational constant and Planck constant) used from Max Planck for derivation of Planck mass by dimensional analysis. In result, a general solution has been found of mass dimension quantity* $m = \gamma^p m_P$*, where* m_P *is the Planck mass, γ ≈ 1.23×10*$^{-61}$ *is a small dimensionless quantity and p is an arbitrary parameter in the interval [–1, 1]. It has been found that the Planck mass* $m_1 \equiv m_P$ *= 2.17×10*$^{-8}$ *kg, mass of the Hubble sphere* m_2 *~ 10*^{53} *kg, minimum quantum of mass/energy* m_3 *= 2.68×10*$^{-69}$ *kg, Weinberg mass* m_5 *= 1.08×10*$^{-28}$ *kg, Eddington mass limit of stars* M_3 *= 6.6×10*^{32} *kg, mass of hypothetical quantum gravity atom* M_2 *= 3.8×10*^{12} *kg and some more masses potentially important for the physics and astrophysics appear particular solutions for values of p, represented as fraction with small numerator and nominator.*

Въведение

Анализът на размерностите е ефективен метод, който често се използува във физиката и астрофизиката за да се разбере физическата ситуация, която се определя от известни физически величини [1-4]. Обикновено той се използува за да се провери правдоподобността на изведените уравнения и пресмятания. Когато е известно дадена физическа величина с кои други величини е свързана, но формата на връзката е неизвестна, се съставя размерностно уравнение за намиране на тази връзка. В лявата страна на уравнението се поставят размерността на физическата величина q_0 с нейния рамерностен степенен показател. В дясната страна на уравнението се поставя произведението от размерностите на определящите величини q_i, повдигнати на степени n_i $[q_0] \sim \prod_{i=1}^{n} [q_i]^{n_i}$, където *n* е цяло положително число, а n_i са рационални числа. Най-често анализът на размерностите се използва в механиката, аеродинамиката, астрофизиката и други области от съвременната физика, където има много процеси, зависещи от малък брой определящи ги величини.

Планковата маса $m_1 \equiv m_P \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ = 2.17×10^{-8} *kg* е изведена в [5] посредством анализ на размерностите с използването на 3 фундаментнални константи – скоростта на светлината във вакуум (*c*), универсалната гравитационна константа на Нютон (*G*) и редуцираната Планкова константа $\hbar$. Планковата маса е масата, чиято Комптънова дължина на вълната $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ е равна на нейния гравитационен (Шварцшилдов) радиус $R_S = \frac{2Gm}{c^2}$ [6]. Съгласно Резултатите съвременната квантова теория на полето, еквивалентната енергия на Планковата маса $E_P = m_P c^2$ ~ 10^{19} *GeV* представлява енергията при която четирите фудаментални взаимодействия се сливат в единно универсално взаимодействие [7].

Към константите *c*, *G* и *H* в [8] бе добавена и константата на Хъбъл *H* и за всяка от тройките константи (*c*, *G*, *H*) , (*c*, $\hbar$, *H*) и (*G*, $\hbar$, *H*) бе *еднозначно* изведена величина с размерност на маса. По такъв начин бяха намерени 3 нови фундаментални маси – $m_2 = \frac{c^3}{GH} \sim 10^{53} kg$, $m_3 = \frac{\hbar H}{c^2} = 2.68 \times 10^{-69} kg$ и $m_4 = \sqrt[5]{\frac{H\hbar^3}{G^2}}$ = 1.43×10^{-20} *kg*. Масата m_2 бе идентифицирана с масата на сферата на Хъбъл, m_3 – с минималния квант маса/енергия, а m_4 се предполага, че е масата на все още неизвестна свръхтежка частица или фундаментална енергетична скала.

В настоящата работа търсим величина с размерност на маса като произведение от рационални степени на *четирите* константи – *c*, *G*, $\hbar$ и *H*.

Общо решение на задачата за намиране на величина с размерност на маса посредством фундаменталните константи *c*, *G*, $\hbar$ и *H*

Посредством анализ на размерностите търсим величина *m* с размерност на маса като произведение от рационални степени n_1, n_2, n_3 и n_4 на константите *c*, *G*, $\hbar$ и *H*:

(1) $$m = k c^{n_1} G^{n_2} \hbar^{n_3} H^{n_4}$$

В уравнение (1) n_1, n_2, n_3 и n_4 са неизвестни степенни показатели, които могат да бъдат определени посредством изравняване на размерностите от двете страни на уравнението, а *k* е безразмерен параметър (коефициент) от порядъка на единица.

Замествайки размерностите на *m*, *c*, *G*, $\hbar$ и *H* получаваме размерностното уравнение:

(2) $$L^0 T^0 M^1 = L^{n_1+3n_2+2n_3} T^{-n_1-2n_2-n_3-n4} M^{-n_2+n_3}$$

От уравнение (2) получаваме система линейни уравнения за неизвестните n_1, n_2, n_3 и n_4:

(3) $$\begin{aligned} &n_1 + 3n_2 + 2n_3 = 0 \\ &-n_1 - 2n_2 - n_3 - n_4 = 0 \\ &-n_2 + n_3 = 1 \end{aligned}$$

Рангът на разширената матрица на системата е $r = 3$ и е равен на ранга на матрицата на системата. Поради това системата е съвместима, т.е. има решение. Тъй като броят на неизвестните е $m = 4 > r = 3$, следва че системата е неопределена и общото решение на системата ще зависи от един произволен параметър *p*. Считайки n_4 за свободен параметър $n_4 = p$ системата (3) се преобразува в:

$$
(4)\qquad \begin{aligned} &n_1 + 3n_2 + 2n_3 = 0 \\ &-n_1 - 2n_2 - n_3 = p \\ &-n_2 + n_3 = 1 \end{aligned}
$$

Детерминантата на системата е Δ = 2 ≠ 0 поради което системата има решение зависещо от произволен параметър *p*. Посредством формулите на Крамер намираме решението на системата (4) спрямо неизвестните n_1, n_2 и n_3:

(5) $n_1 = (1-5p)/2$, $n_2 = (p-1)/2$, $n_3 = (p+1)/2$, $n_4 = p$,
където *p* е произволен параметър.

Замествайки решението (5) в уравнение (1) получаваме уравнение (6) за масата *m*:

(6) $m \sim c^{(1-5p)/2} G^{(p-1)/2} \hbar^{(p+1)/2} H^{p}$

Математически параметърът *p* може да приема произволни стойности от $-\infty$ до $+\infty$, но физически смисъл биха могли да имат само решенията в интервала [–1, 1], тъй като за крайните стойности *p* = 1 и *p* = – 1 се получават съответно най-малката измерима маса във вселената $m_3 \sim \dfrac{\hbar H}{c^2}$ = 2.68×10^{-69} kg ~ 10^{-33} *eV* [9, 10] и най-голямата наблюдаема маса – масата на сферата на Хъбъл $m_2 \sim \dfrac{c^3}{GH}$ ~ 10^{-53} *kg* [11, 12]. Разглеждаме частните решения при които параметъра $|p| \le 1$ се явява дроб с малък числител и знаменател, т.е. $p = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{3}$. По-надолу ще покажем, че някои от тези решения водят до масови формули, които могат да представляват интерес за съвременната физика.

Частни решения с потенциално значение за физиката и астрофизиката, при които параметъра $|p| \le 1$ се явява дроб с малък числител и знаменател

За $p = \frac{1}{3}$ от общото решение (6) получаваме частното решение:

(7) $m_5 = c^{-\frac{1}{3}} G^{-\frac{1}{3}} \hbar^{\frac{2}{3}} H^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{H\hbar^2}{cG}}$ = 1.08×10^{-28} *kg* ≈ 60.8 *MeV*

Формула (7) е добре известната масова формула на Вайнберг [13]. Масата m_5 е около 2 пъти по малка от масата на пиона $m_\pi \approx 2.48 \times 10^{-28} kg$. Физическият смисъл на тази маса бе намерен от Сиварам [9]. Той показа, че масата на Вайнберг се явява най-малката маса, чиято собствена гравитационна енергия има измерима стойност за времето на съществуване на Вселената H^{-1} ~ 1.38×10^{10} години.

За $p = -\frac{1}{3}$ от общото решение (6) получаваме масата m_6:

(8) $m_6 = c^{\frac{4}{3}} G^{-\frac{2}{3}} \hbar^{\frac{1}{3}} H^{-\frac{1}{3}} = c \cdot \sqrt[3]{\dfrac{c\hbar}{G^2 H}} = 4.36 \times 10^{12} kg$

В [14] е показано, че за хипотетичния ‘Квантов гравитационен атом’, съставен от неутрална централна маса M_G около която на разстояние равно на радиуса на Бор $a_0 = \dfrac{\hbar^2}{m_e e^2}$ = 5.3×10^{-11} *m* обикаля електронеутрална частица с маса равна на масата на електрона m_e,

гравитационният потенциал $V = \frac{GM_G m_e}{a_0}$ е равен на електростатичния потенциал $V_E = \frac{e^2}{a_0}$.
Оттук Форсайт определя централната маса M_G:

(9) $M_G = \frac{e^2}{Gm_e}$ = 3.8×10^{12} *kg*

За $p = \frac{1}{2}$ от (6) получаваме частното решение:

(10) $$m_7 = c^{-\frac{3}{4}} G^{-\frac{1}{4}} \hbar^{\frac{3}{4}} H^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\frac{\hbar^3 H^2}{Gc^3}} = 7.64\times10^{-39} kg = 4.3\times10^{-3} eV$$

Очевидно масата m_7, получена от формула (6) при $p = \frac{1}{2}$, е от порядъка на масата на покой на неутриното ν [15].

За $p = -\frac{1}{2}$ от (6) получаваме частното решение:

(11) $$m_8 = c^{\frac{7}{4}} G^{-\frac{3}{4}} \hbar^{\frac{1}{4}} H^{-\frac{1}{2}} = c \cdot \sqrt[4]{\frac{c^3\hbar}{G^3H^2}} = 6.18\times10^{22} kg$$

Масата m_8 представлява около 1% от масата на Земята и е близка до масата на Луната.

За $p = \frac{1}{4}$ от общото решение (6) получаваме:

(12) $$m_9 = c^{-\frac{1}{8}} G^{-\frac{3}{8}} \hbar^{\frac{5}{8}} H^{\frac{1}{4}} = \sqrt[8]{\frac{\hbar^5 H^2}{cG^3}} = 1.29\times10^{-23} kg$$ = 7.25 *TeV*

Тази енергия е типична за енергията на протоните в Големия адронен ускорител и е възможно да има връзка с масата на все още неоткрита свръхтежка частица или фундаментална енергетична скала.

За $p = -\frac{1}{4}$ от общото решение (6) получаваме масата:

(13) $$m_{10} = c^{\frac{9}{8}} G^{-\frac{5}{8}} \hbar^{\frac{3}{8}} H^{-\frac{1}{4}} = c \cdot \sqrt[8]{\frac{c\hbar^3}{G^5H^2}} = 3.67\times10^{7} kg$$

Масата m_{10} по всяка вероятност няма отношение към фундаменталната физика.

За $p = -\frac{1}{5}$ от общото решение (6) получаваме масата:

(14) $$m_{11} = cG^{-\frac{3}{5}} \hbar^{\frac{2}{5}} H^{-\frac{1}{5}} = c \cdot \sqrt[5]{\frac{\hbar^2}{G^3H}} = 3.4\times10^{4} kg$$

Масата m_{11} едва ли има някакво физическо значение.

Случаят $p = \frac{1}{5}$ еднозначно води до формулата за масата:

(15) $m_4 = \sqrt[5]{\frac{H\hbar^3}{G^2}}$ = 1.43×10^{-20} *kg* = 8.0×10^{6} *GeV*

Тази маса също не може да бъде идентифицирана и може да се разглежда като евристично предсказание на предложения модел.

За $m_7 = \sqrt[4]{\frac{\hbar^3H^2}{Gc^3}}$ от общото решение (6) получаваме частното решение:

(16) $$m_{12} = c^{-\frac{7}{6}} G^{-\frac{1}{6}} \hbar^{\frac{5}{6}} H^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{c} \cdot \sqrt[6]{\frac{\hbar^5H^4}{cG}} = 5.39\times10^{-49} kg = 3.0\times10^{-13} eV$$

Тази маса е близка до една от седемте фундаментални еквидистантни маси намерени в [16], а именно масата $M_{(-1)} = 7.15\times10^{-49} kg$.

За $p = -\frac{2}{3}$ от общото решение (6) получаваме масата m_{13}:

(17) $$m_{13} = c^{\frac{13}{6}} G^{-\frac{5}{6}} \hbar^{\frac{1}{6}} H^{-\frac{2}{3}} = c^2 \cdot \sqrt[6]{\frac{c\hbar}{G^5 H^4}} = 8.76 \times 10^{32} kg$$

Масата m_{13} в [16] бе идентифицирана с Едингтоновата гранична маса на най-масивните звезди.

Изведените по-горе маси за които параметъра $|p| \le 1$ в общото решение се явява дроб с малък числител и знаменател са представени в Табл. 1.

Таблица 1. Маси за които параметъра $|p| \le 1$ в общото решение се явява дроб с малък числител и знаменател.

Стойност на *p*	Маса сответствуваща на *p*	Идентификация на масата
-1	$m_2 = \frac{c^3}{GH} = M$ = 1.76×10^{53} *kg*	Маса на наблюдаемата Вселена M_H
$-\frac{2}{3}$	$m_{13} = c^2 \cdot \sqrt[6]{\frac{c\hbar}{G^5 H^4}}$ = 8.76×10^{32} *kg*	Едингтонова гранична маса за звездите
$-\frac{1}{2}$	$m_8 = c \cdot \sqrt[4]{\frac{c^3\hbar}{G^3 H^2}}$ = 6.18×10^{22} *kg*	Маса на Луната (Типичен спътник на планета)
$-\frac{1}{3}$	$m_6 = c \cdot \sqrt[3]{\frac{c\hbar}{G^2 H}}$ = 4.36×10^{12} *kg*	'Квантов гравитационен атом' M_G
$-\frac{1}{4}$	$m_{10} = c \cdot \sqrt[8]{\frac{c\hbar^3}{G^5 H^2}}$ = 3.67×10^{7} *kg*	–
$-\frac{1}{5}$	$m_{11} = c \cdot \sqrt[5]{\frac{\hbar^2}{G^3 H}}$ = 3.40×10^{4} *kg*	–
0	$m_1 = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}}$ =2.17×10^{-8} *kg*	Планкова маса m_P
$\frac{1}{5}$	$m_4 \sim \sqrt[5]{\frac{H\hbar^3}{G^2}}$ = 1.43 × 10^{-20} *kg*	Предсказание на метода за свръхмасивна частица
$\frac{1}{4}$	$m_9 = \sqrt[8]{\frac{\hbar^5 H^2}{cG^3}}$ = 1.29×10^{-23} *kg*	Предсказание на метода за неизвестна масивна частица
$\frac{1}{3}$	$m_5 = \sqrt[3]{\frac{H\hbar^2}{cG}}$ = 1.08×10^{-28} *kg*	Маса на Вайнберг m_W
$\frac{1}{2}$	$m_7 = \sqrt[4]{\frac{\hbar^3 H^2}{Gc^3}}$ = 7.64×10^{-39} *kg*	Неутрино ν
$\frac{2}{3}$	$m_{12} = \frac{1}{c} \cdot \sqrt[6]{\frac{\hbar^5 H^4}{cG}}$ = 5.39×10^{-49} *kg*	Маса на Форсайт-Вълев $M_{(-1)}$
1	$m_3 = \frac{\hbar H}{c^2}$ = 2.68×10^{-69} *kg*	Минимален квант маса/енергия m_H (Масивен гравитон)

Вероятно общото решение (6) съдържа и други маси, интересни от физическа гледна точка, но неопределеността на параметъра *p* не позволява да се намерят тези маси.

Общото решение (6) може да се преобразува по следния начин:

(18) $$m \sim c^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}p} G^{-\frac{1}{2}+\frac{p}{2}} \hbar^{\frac{1}{2}+\frac{p}{2}} H^{p} = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}}\left(\sqrt{\frac{G\hbar H^2}{c^5}}\right)^{p}$$

Очевидно първият множител в уравнение (18) $\sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = m_P$ = 2.17×10^{-8} *kg* е масата на Планк. Вторият множител $\sqrt{\frac{G\hbar H^2}{c^5}} = \gamma$ = 1.23×10^{-61} е безразмерна величина с изключително малка стойност. Замествайки тези величини в (18) получаваме друга форма на запис на общото решение (6):

(19) $$m \sim \left(\sqrt{\frac{G\hbar H^2}{c^5}}\right)^{p} m_P = \gamma^{p} m_P ,$$

където m_P е Планковата маса, $\gamma = \sqrt{\frac{G\hbar H^2}{c^5}}$ ~ 10^{-61} е изключително малка безразмерна величина, а *p* е произволен параметър.

Заключения

Към трите фундаментални константи (скоростта на светлината *c*, гравитационната константа *G* и Планковата константа $\hbar$), използувани от Макс Планк за извеждане на Планковата маса посредством анализ на размерностите, е добавена и константата на Хъбъл *H*. Посредством анализ на размерностите се търси величина *m* с размерност на маса като произведение от рационални степени на константите *c*, *G*, $\hbar$ и *H*. В резултат на това е намерено общо решение за величината с размерност на маса $m = \gamma^p m_P$, където m_P = 2.17×10^{-8} kg е Планковата маса, γ = 1.23×10^{-61} е малка безразмерна величина, а *p* е произволен параметър в интервала [–1, 1].

Показано е, че Планковата маса $m_1 \equiv m_P = \sqrt{\frac{c\hbar}{G}}$ = 2.17×10^{-8} *kg*, масата на сферата на Хъбъл $m_2 \sim \frac{c^3}{GH}$ ~ 10^{53} *kg*, минималния квант маса/енергия $m_3 \sim \frac{\hbar H}{c^2}$ = 2.68×10^{-69} *kg*, масата на Вайнберг $m_5 = \sqrt[3]{\frac{H\hbar^2}{cG}}$ = 1.08×10^{-28} *kg*, Едингтоновата граница за масата на звездите M_3 = 6.6×10^{32} *kg*, масата на хипотетичния квантов гравитационен атом M_2 = 3.8×10^{12} *kg* и още някои потенциално важни за физиката и астрофизиката маси, представляват частни решения за стойност на параметъра *p*, изразена като дроб с малък числител и знаменател. Твърде вероятно е някои от неидентифицираните маси да имат евристично значение за астрофизиката и физиката на високите енергии.

Литература:

1. Bridgman, P. W. Dimensional Analysis. Yale Univ. Press, New Haven, 1922.
2. Kurth, R. Dimensional Analysis and Group Theory in Astrophysics. Pergamon Press, Oxford, 1972.
3. Bhaskar, R., A. Nigam Qualitative physics using dimensional analysis. Artificial Intelligence, Vol. 45, pp. 73-111, 1990.
4. Petty, G. W. Automated computation and consistency checking of physical dimensions and units in scientific programs. Software – Practice and Experience, Vol. 31, pp. 1067-1076, 2001.
5. Planck, M. The Theory of Heat Radiation. Dover Publications, New York, 1959; translation from German Ed. 1906.
6. Bergmann, P. G. The Riddle of Gravitation. Dover Publications, New York, 1992.
7. Georgi, H., H.R. Quinn, S. Weinberg Hierarchy of interactions in unified gauge theories. Phys. Rev. Lett., Vol. 33, pp. 451-454, 1974.
8. Valev, D. Three fundamental masses derived by dimensional analysis. Am. J. Space Sci., Vol. 1, Issue 2, pp. 145-149, 2013.

9. Sivaram, C. Cosmological and quantum constraint on particle masses. Am. J. Phys., Vol. 50, pp. 279, 1982.
10. Alfonso-Faus, A. Universality of the self gravitational potential energy of any fundamental particle. Astrophys. Space Sci., Vol. 337, pp. 363-365, 2012.
11. Carvalho, J.C. Derivation of the mass of the observable universe. Int. J. Theor. Phys., Vol. 34, pp. 2507-2509, 1995.
12. Valev, D., Determination of total mechanical energy of the universe within the framework of Newtonian mechanics. Preprint : arxiv: 0909.2726, 2009.
13. Weinberg, S. Gravitation and Cosmology. Wiley, New York, 1972.
14. Forsythe, C. J. Resonance structure of matter, nature of gravitation, and the quantum energy states of the hydrogen atom. Phys. Essays, Vol. 22: pp. 112-121, 2009.
15. Goobar, A., S. Hannestad, E. Mortsell and H. Tu The neutrino mass bound from WMAP 3 year data, the baryon acoustic peak, the SNLS supernovae and the Lyman-α forest. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Issue 06, id. 019, 2006.
16. Forsythe, C. J. and D. T. Valev Extended mass relation for seven fundamental masses and new evidence of large numbers hypothesis. Phys. Int., Vol. 5, Issue 2, pp. 152-158, 2014.